



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



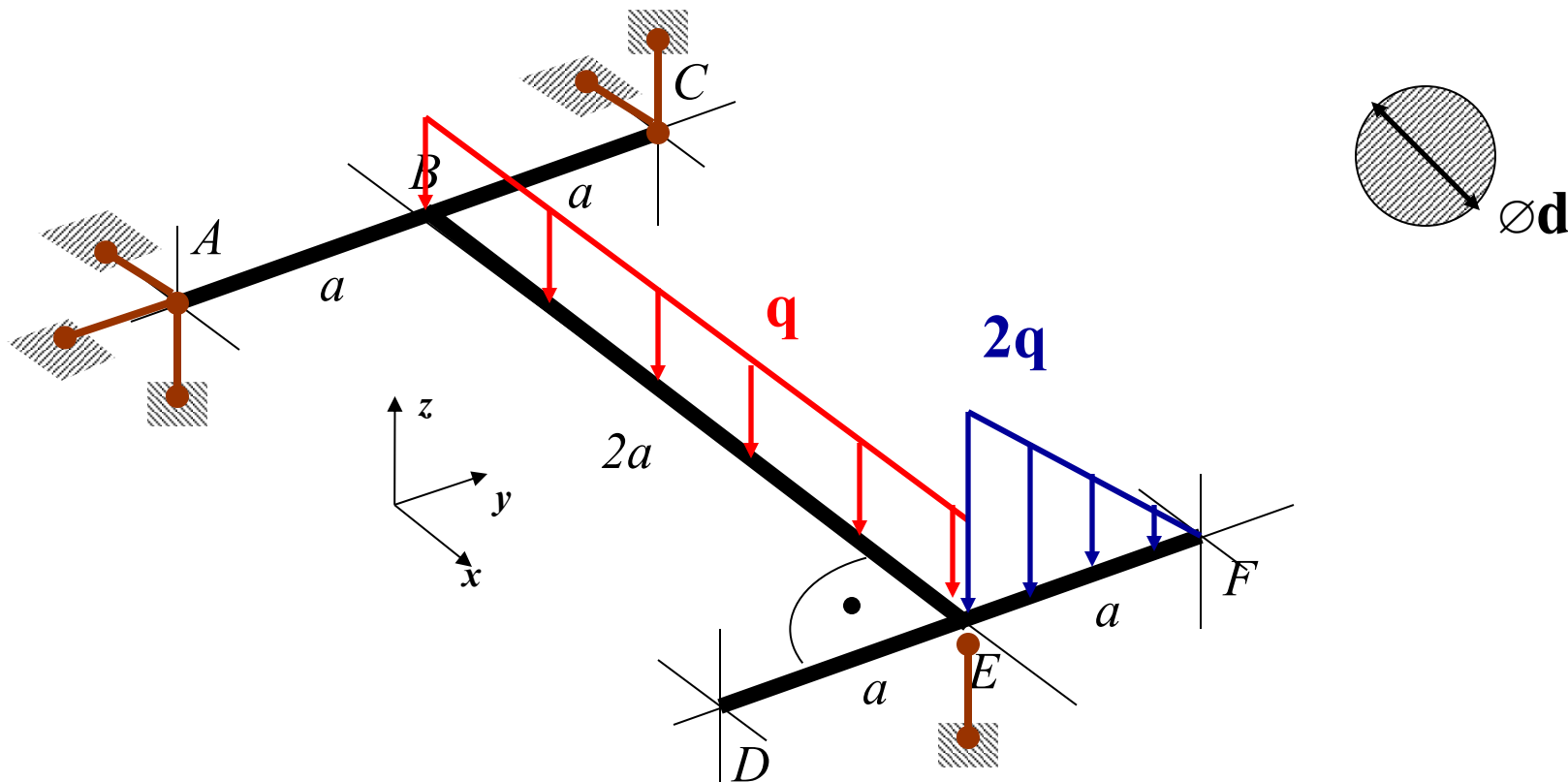
Wykład 2

Ramy statycznie wyznaczalne

Obciążone przestrzennie

Zad.1. Rozwiązać ramę płaską obciążoną prostopadłe do swej pł.

Dane: $q=1\text{kN/m}$, $a=1\text{m}$, $d=3\text{cm}$



Charakterystyki przekroju:

$$J_y = \frac{\pi d^4}{64} = 3,98 \text{ cm}^4$$

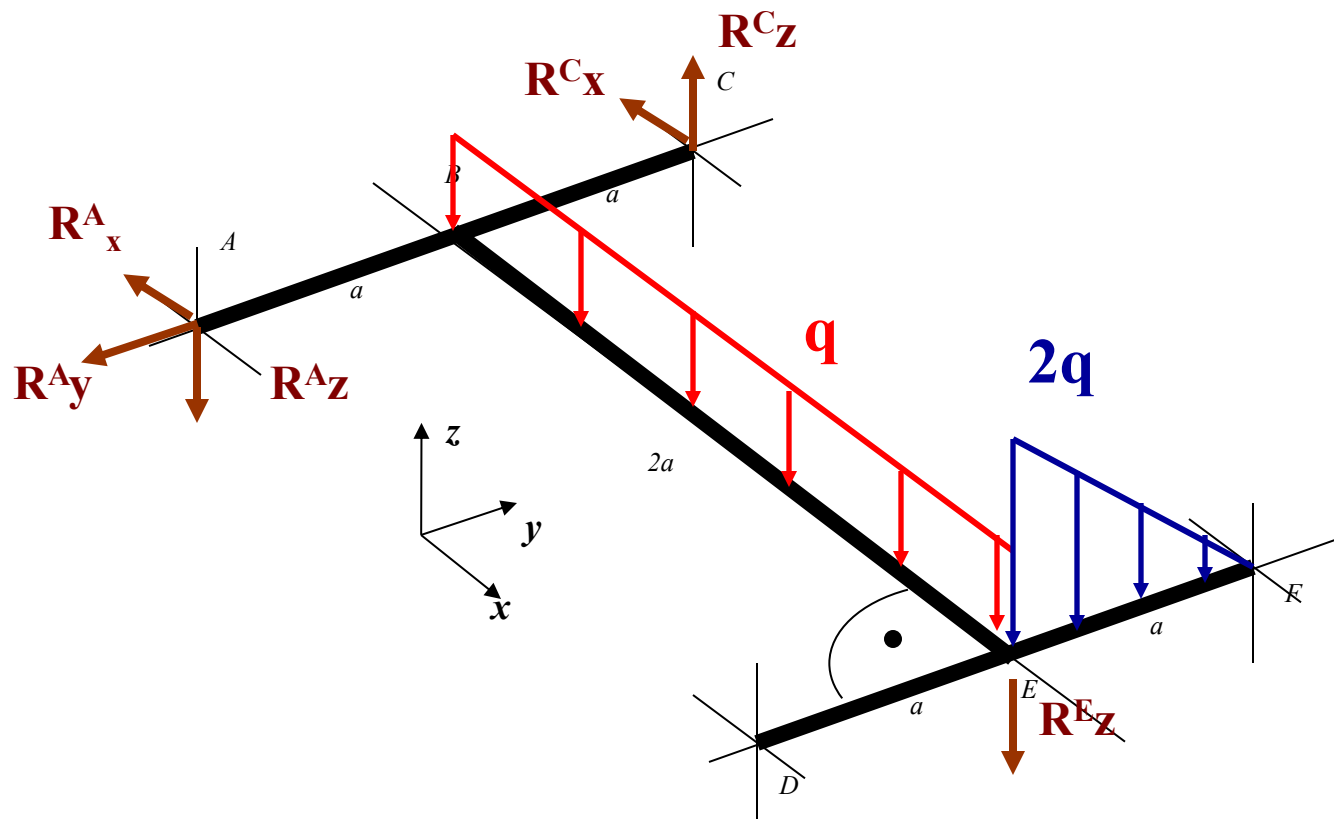
$$J_o = \frac{\pi d^4}{32} = 7,95 \text{ cm}^4$$

$$\rightarrow w_y = \frac{J_y}{d/2} = 2,65 \text{ cm}^3$$

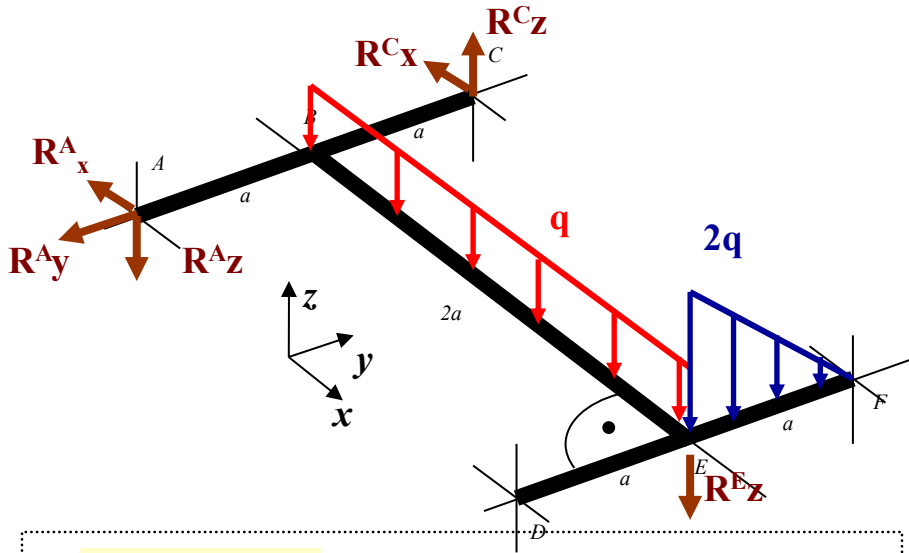
$$\rightarrow w_o = \frac{J_o}{d/2} = 5,3 \text{ cm}^3$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 707 \text{ mm}^2$$

Schemat statyczny i określenie reakcji:



Schemat statyczny i określenie reakcji:



$$\sum M_{l_{AC}} = 0:$$

$$\frac{-2qa}{2} \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a - R_z^E \cdot 2a = 0$$

$$\rightarrow R_z^E = -2qa$$

$$\sum M_{l_{CF}} = 0:$$

$$q \cdot 2a \cdot a + \frac{2q \cdot a}{2} \cdot \frac{2}{3}a + R_z^A \cdot 2a + R_z^E \cdot a = 0$$

$$R_z^A = -\frac{4}{3}qa - \frac{1}{2}R_z^E = -\frac{4}{3}qa + qa$$

$$\rightarrow R_z^A = -\frac{1}{3}qa$$

$$\sum F_z = 0:$$

$$-\frac{2q \cdot a}{2} - q \cdot 2a - R_z^A - R_z^E + R_z^C = 0$$

$$R_z^C = 3qa - \frac{1}{3}qa - 2qa \rightarrow R_z^C = \frac{2}{3}qa$$

$$\sum M_A = 0:$$

$$R_x^C \cdot 2a = 0 \rightarrow R_x^C = 0$$

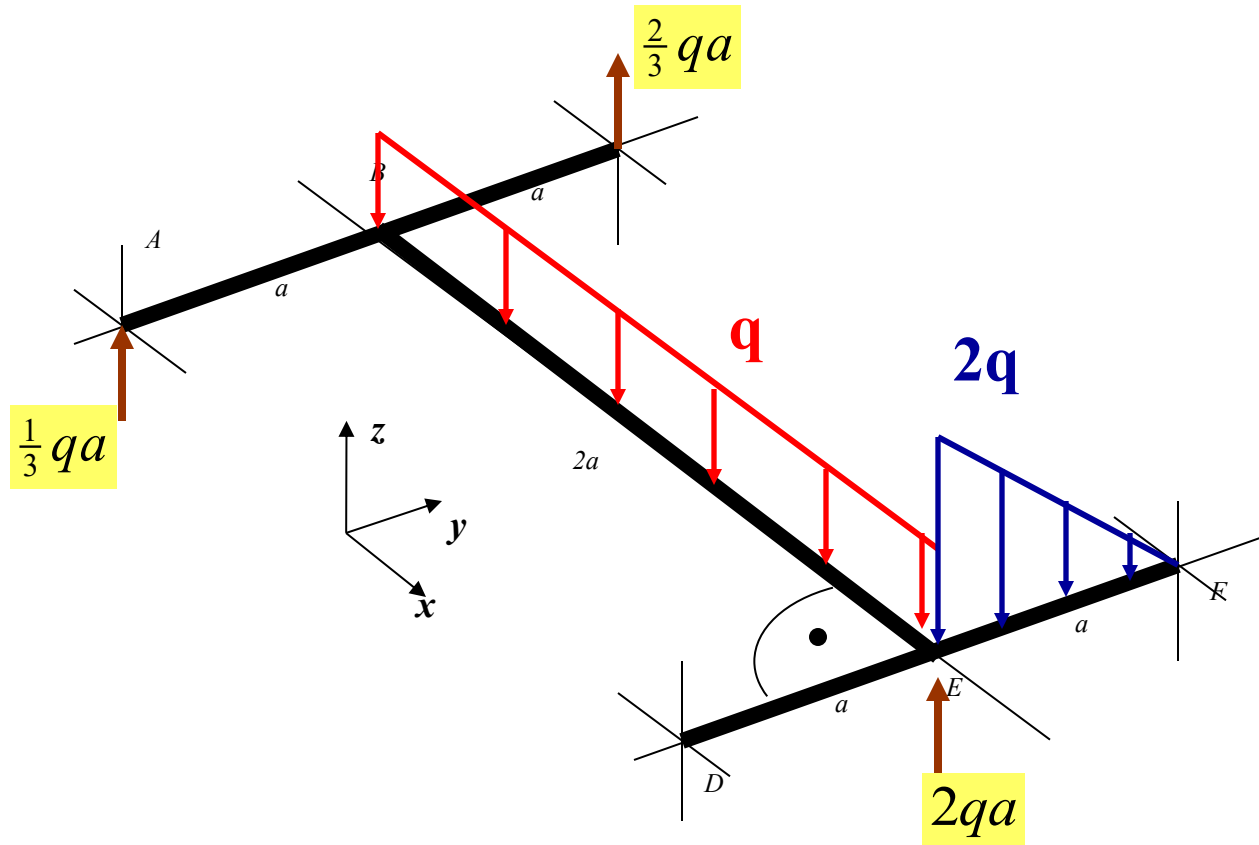
$$\sum M_C = 0:$$

$$R_x^A \cdot 2a = 0 \rightarrow R_x^A = 0$$

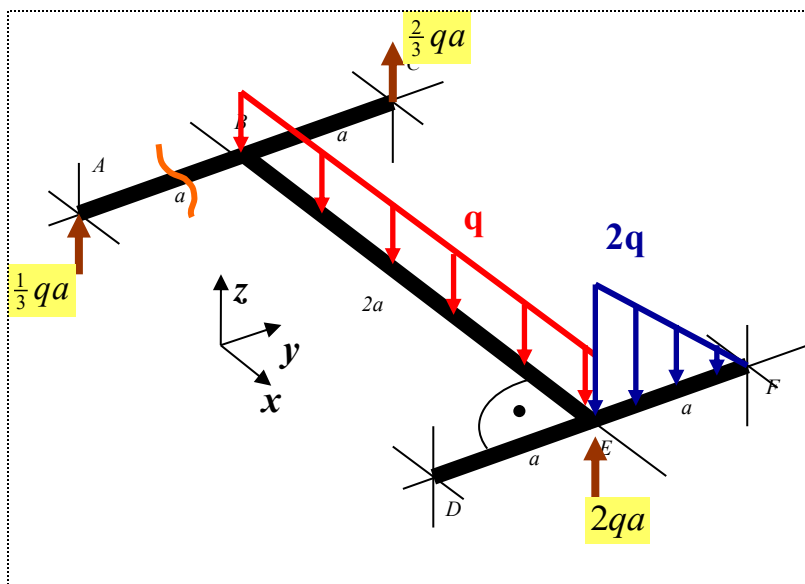
$$\sum F_y = 0:$$

$$\rightarrow R_y^A = 0$$

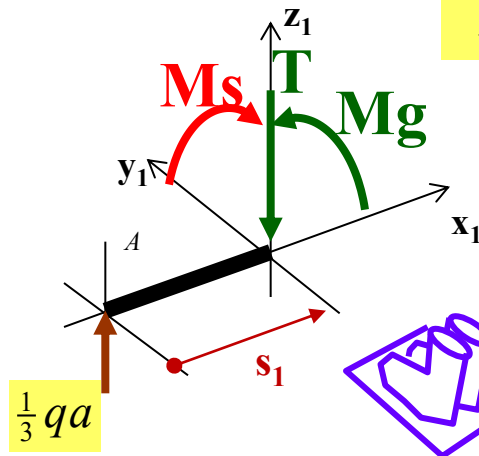
Reakcje



Wyznaczenie składowych wysiłku przekroju **T**, **Mg**, **Ms** (5 przedziałów)



Przedział I (A÷B)



Suma sił $\perp$ do osi pręta:

$$\frac{1}{3} qa - T = 0$$

$$\rightarrow T(s) = \frac{1}{3} qa$$

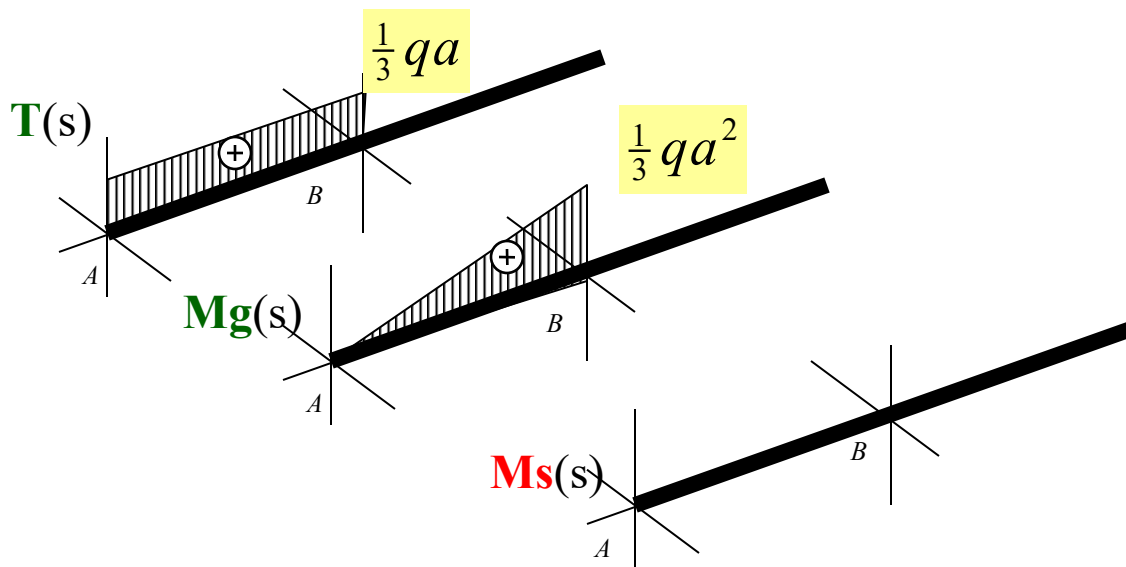
Suma momentów wzgl. osi y_1 :

$$-\frac{1}{3} qa \cdot s_1 + Mg = 0$$

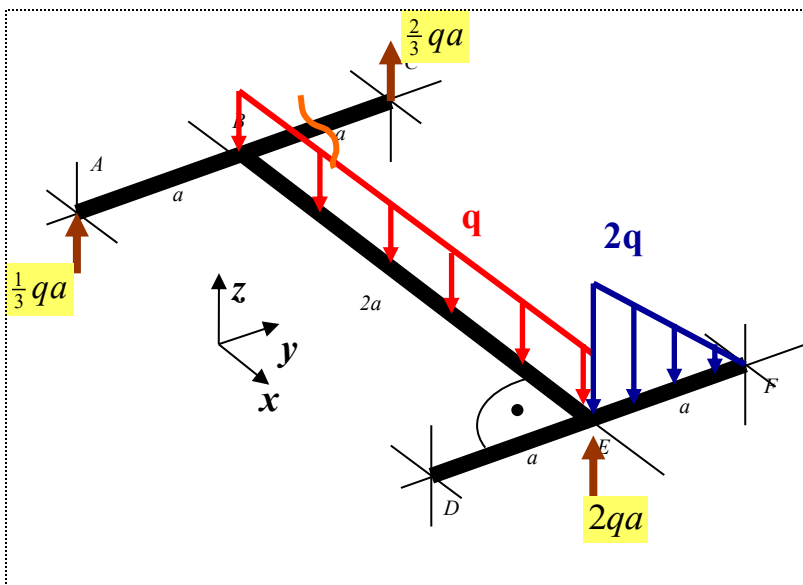
$$\rightarrow Mg(s) = \frac{1}{3} qa \cdot s_1$$

Suma momentów wzgl. osi x_1 :

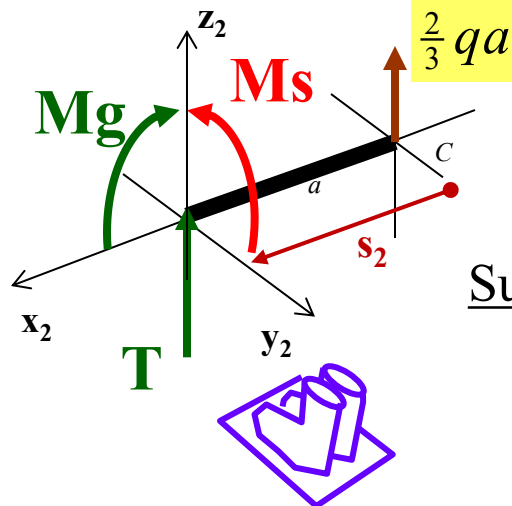
$$Ms(s) = 0$$



Wyznaczenie składowych wysiłku przekroju **T**, **Mg**, **Ms** (5 przedziałów)



Przedział II (B÷C)



Suma sił $\perp$ do osi pręta:

$$\frac{2}{3}qa + T = 0$$

$$\rightarrow T(s) = -\frac{2}{3}qa$$

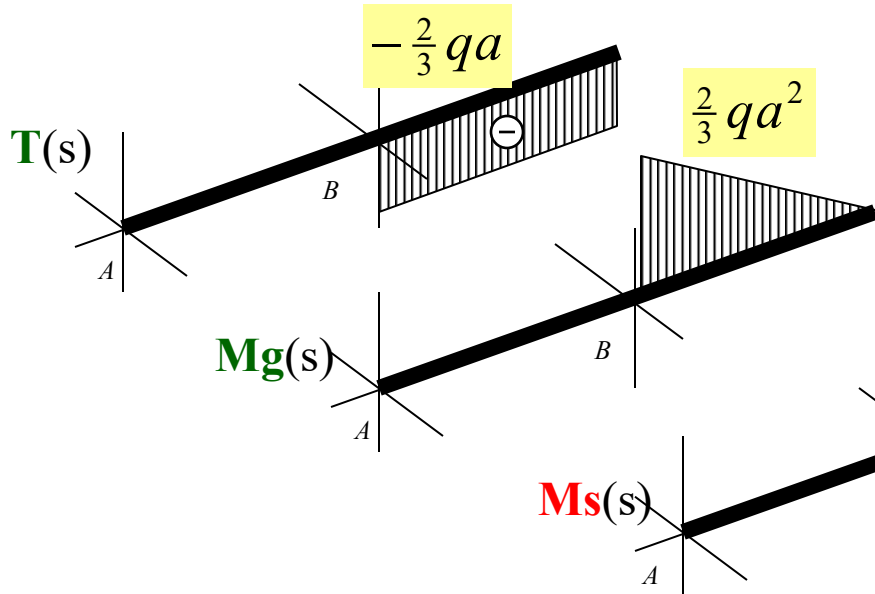
Suma momentów wzgl. osi y_2 :

$$\frac{2}{3}qa \cdot s_2 - Mg = 0$$

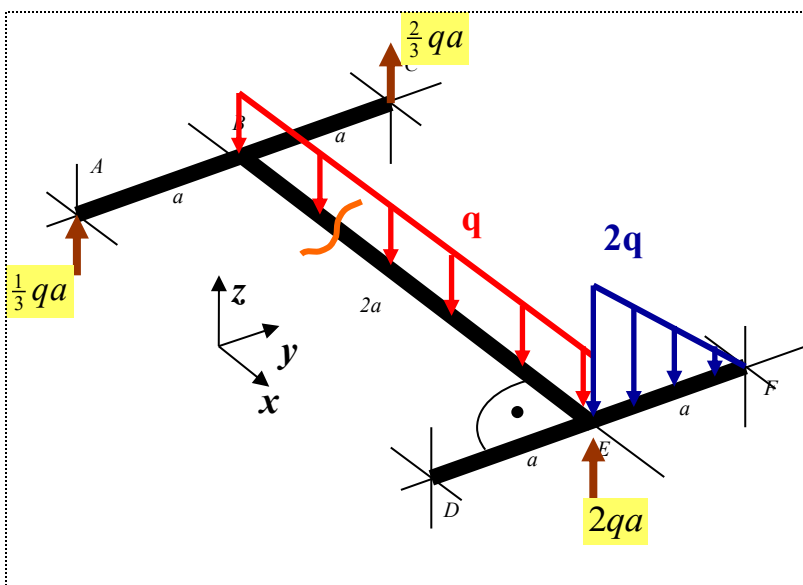
$$\rightarrow Mg(s) = \frac{2}{3}qa \cdot s_2$$

Suma momentów wzgl. osi x_2 :

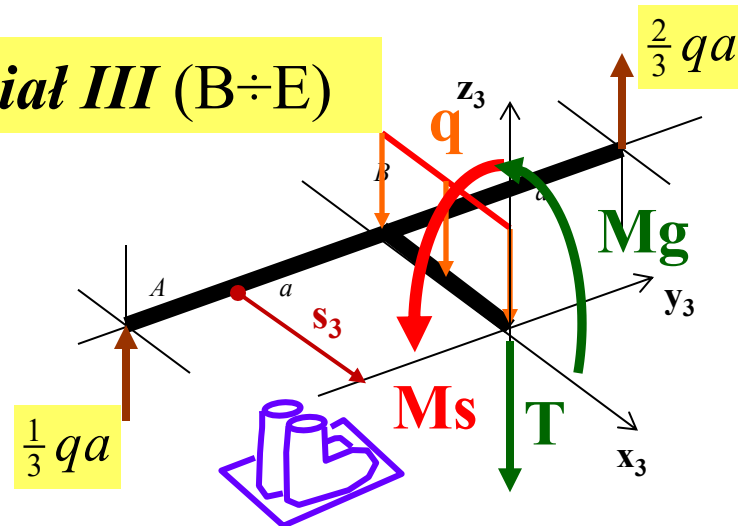
$$Ms(s) = 0$$



Wyznaczenie składowych wysiłku przekroju **T**, **Mg**, **Ms** (5 przedziałów)



Przedział III (B÷E)



Suma sił $\perp$ do osi pręta:

$$\frac{2}{3} qa + \frac{1}{3} qa - q \cdot s_3 - T = 0$$

$$\rightarrow T(s) = q \cdot (a - s_3)$$

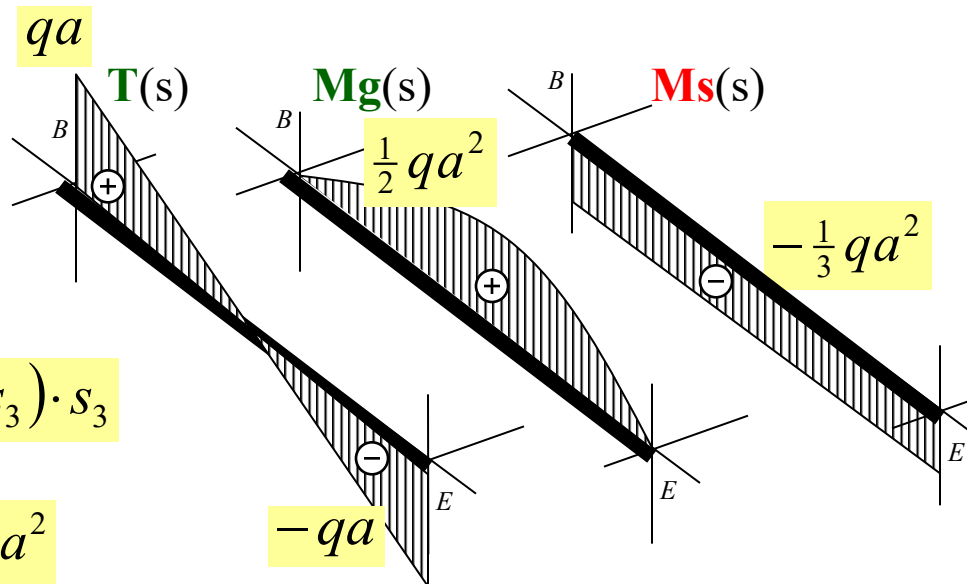
Suma momentów wzgl. osi y_3 :

$$q \cdot s_3 \cdot \frac{1}{2} s_3 - \left(\frac{2}{3} qa + \frac{1}{3} qa \right) \cdot s_3 + Mg = 0$$

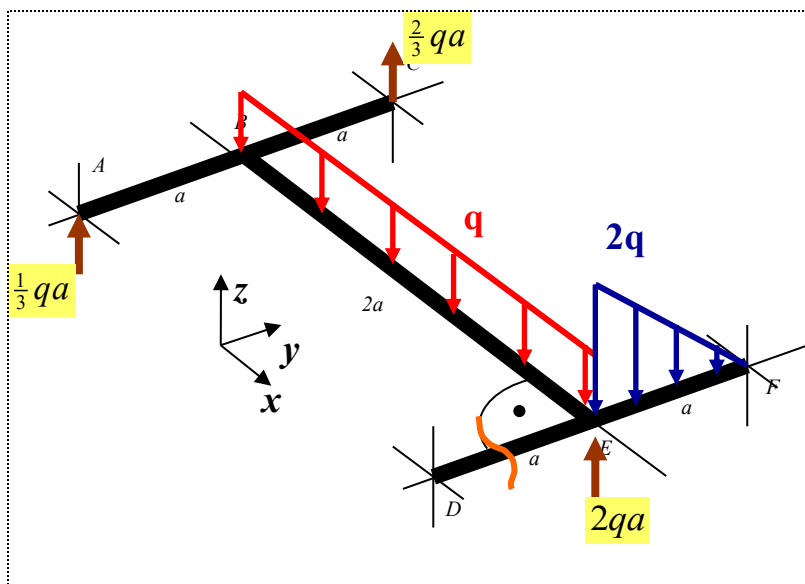
$$\rightarrow Mg(s) = \frac{1}{2} q \cdot (2a - s_3) \cdot s_3$$

Suma momentów wzgl. osi x_3 :

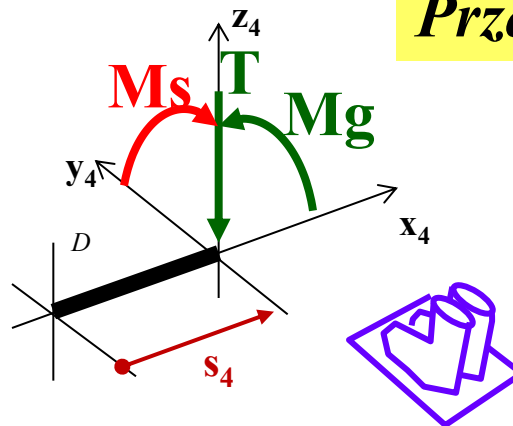
$$\frac{2}{3} qa \cdot a - \frac{1}{3} qa \cdot a + Ms = 0 \rightarrow Ms(s) = -\frac{1}{3} qa^2$$



Wyznaczenie składowych wysiłku przekroju **T**, **Mg**, **Ms** (5 przedziałów)



Przedział IV (D÷E)



Suma sił $\perp$ do osi pręta:

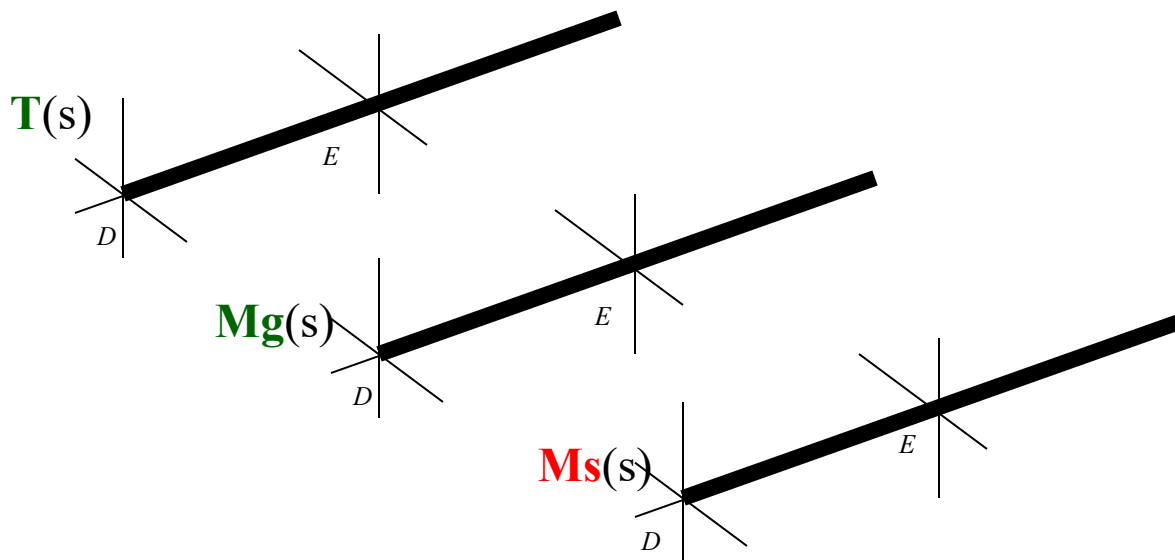
$$\rightarrow T(s) = 0$$

Suma momentów wzgl. osi y_4 :

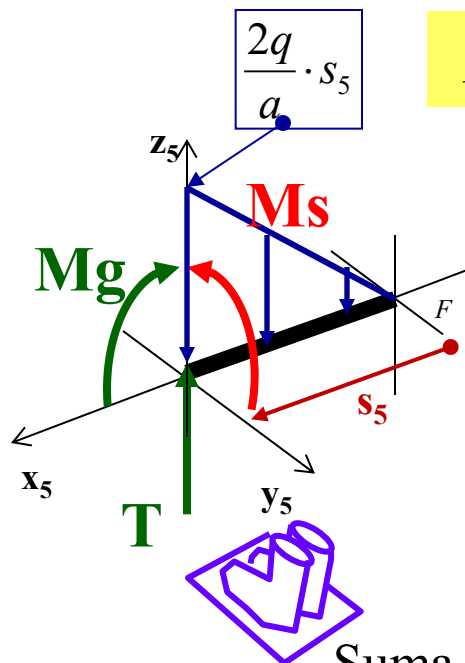
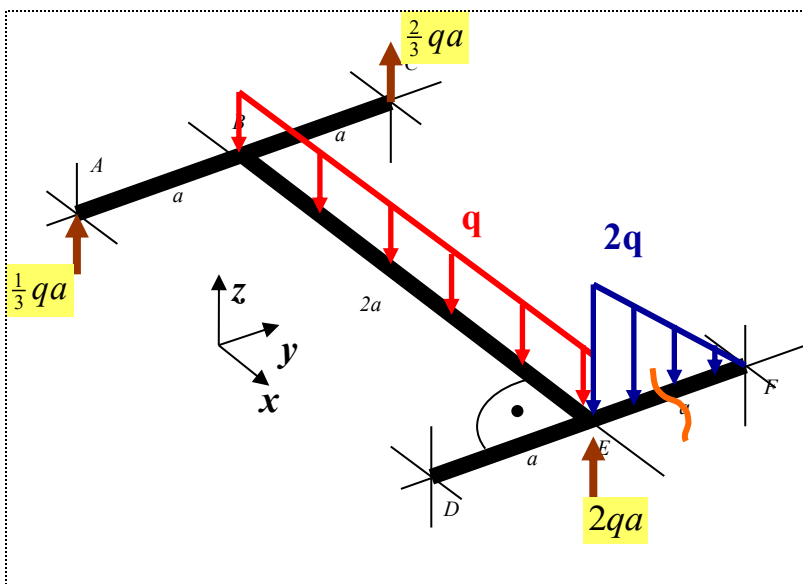
$$\rightarrow Mg(s) = 0$$

Suma momentów wzgl. osi x_4 :

$$Ms(s) = 0$$



Wyznaczenie składowych wysiłku przekroju **T**, **Mg**, **Ms** (5 przedziałów)



Przedział V (E÷F)

Suma sił $\perp$ do osi pręta:

$$T - \frac{1}{2} \cdot s_5 \cdot \frac{2q}{a} s_5 = 0$$

$$\rightarrow T(s) = \frac{q}{a} s_5^2$$

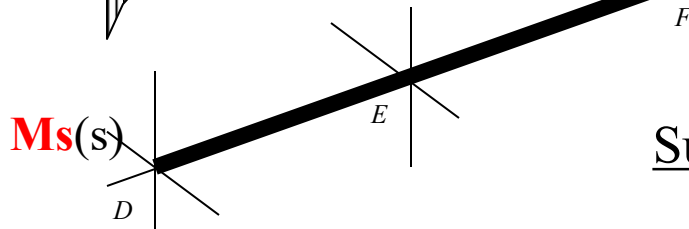
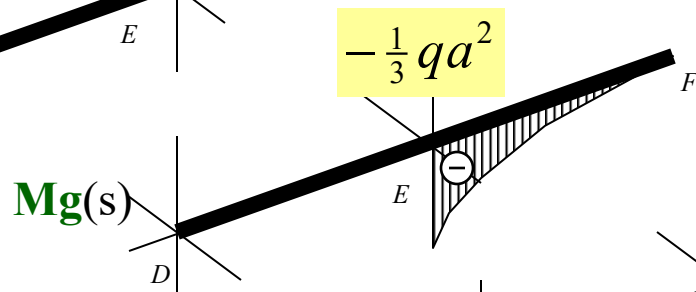
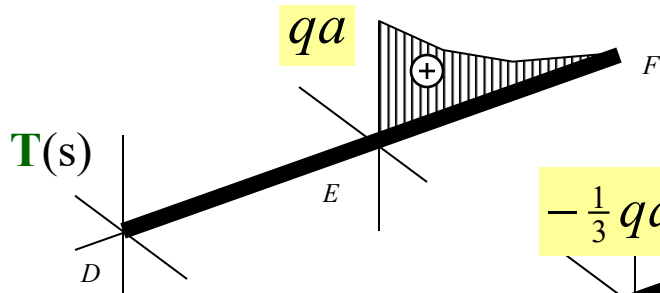
Suma momentów wzgl. osi y_5 :

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{2q}{a} \cdot s_5 \cdot s_5 \cdot \frac{1}{3} \cdot s_5 - Mg = 0$$

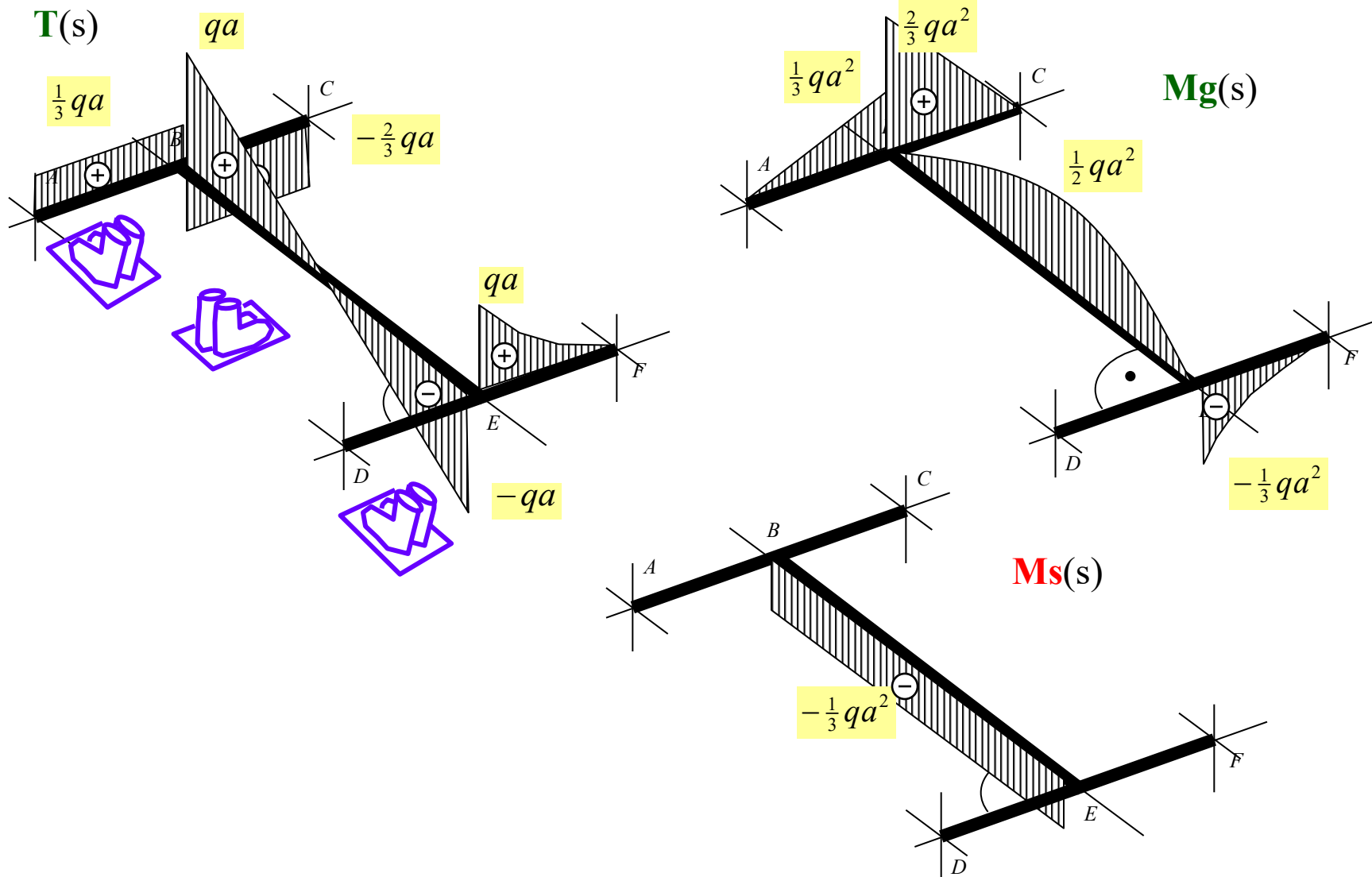
$$\rightarrow Mg(s) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{q}{a} \cdot s_5^3$$

Suma momentów wzgl. osi x_5 :

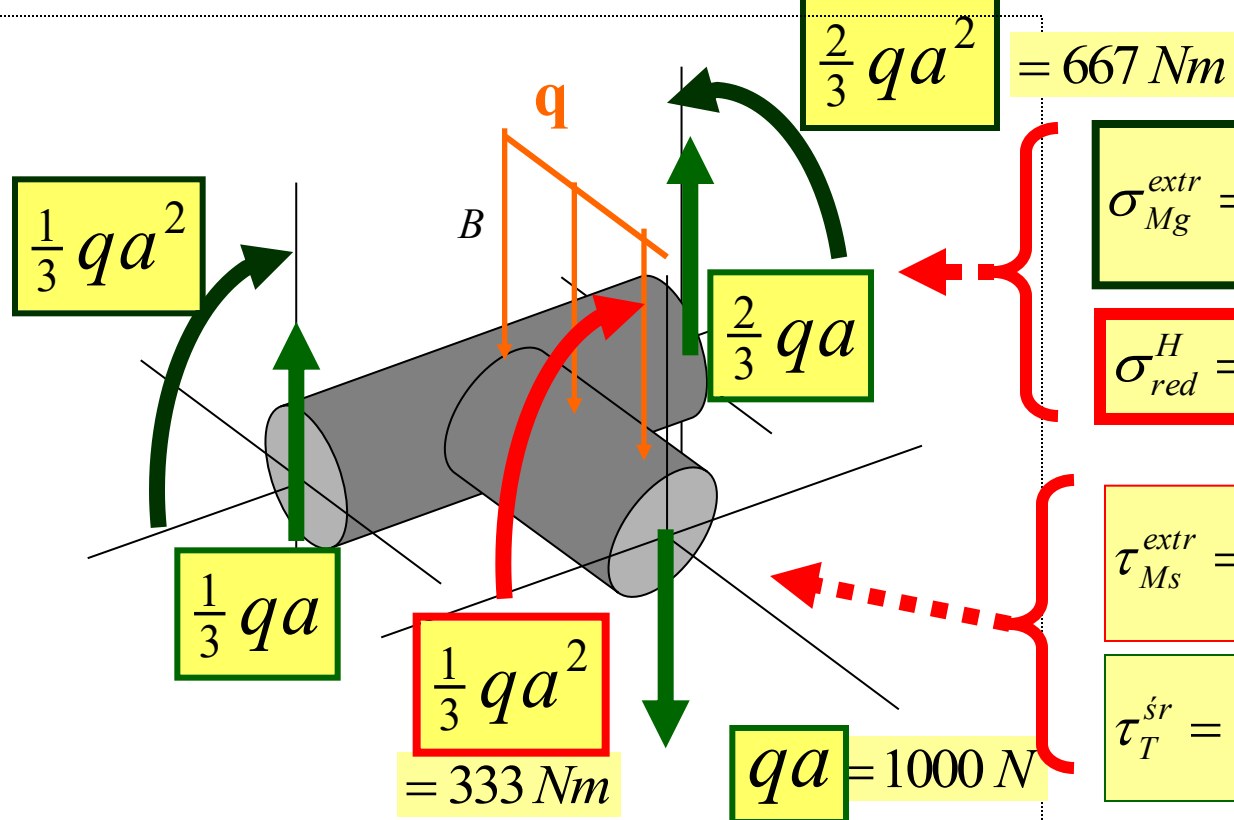
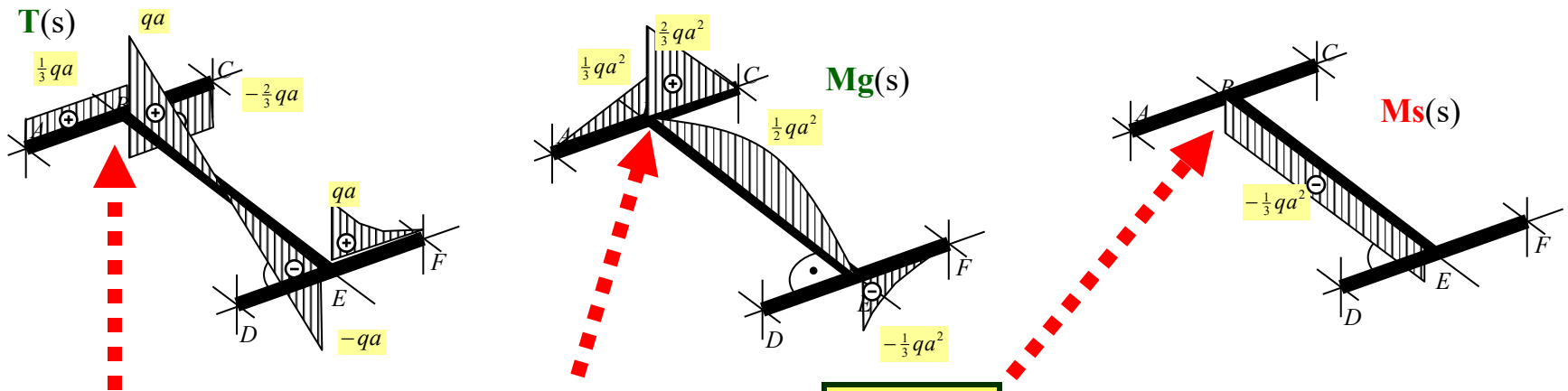
$$Ms(s) = 0$$



Składowe wysiłku przekroju **T**, **Mg**, **Ms**



Statyka naroży (naroże B)



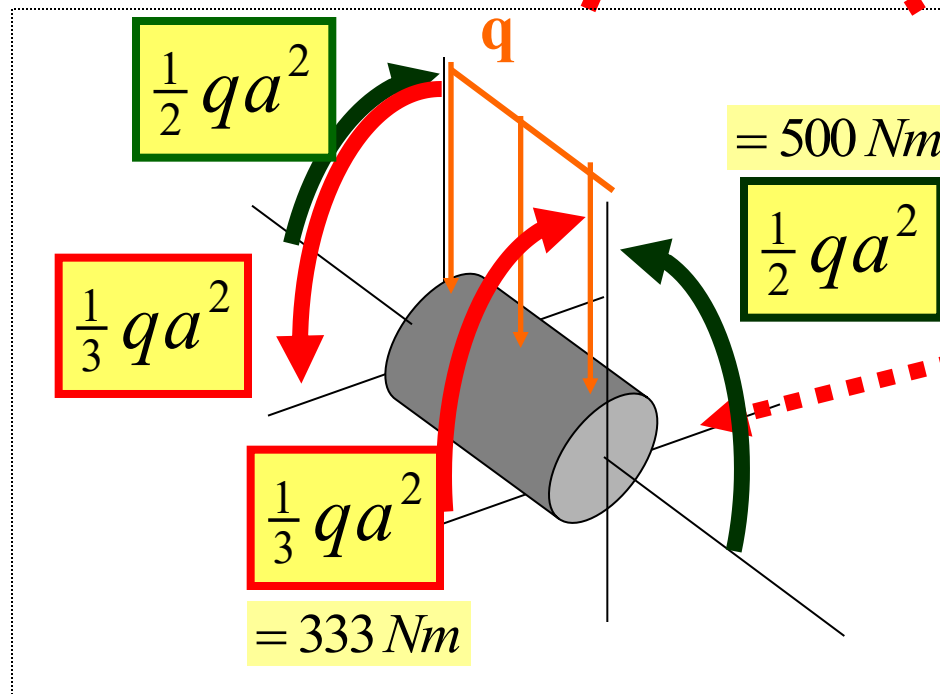
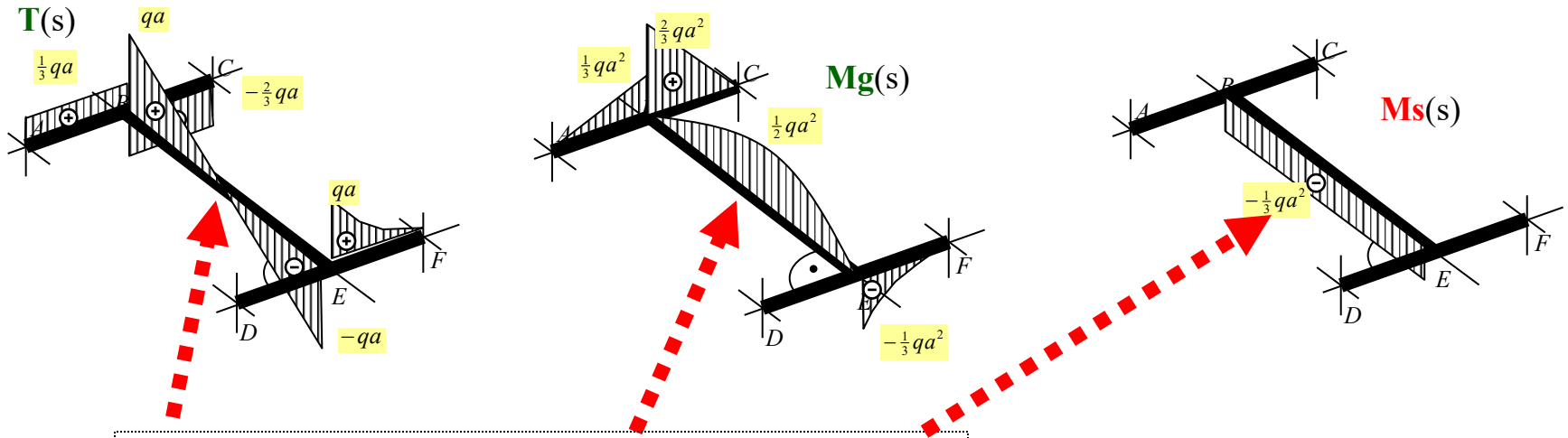
$$\sigma_{M_g}^{extr} = \frac{667 \text{ Nm}}{2,65 \text{ cm}^3} = 251 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red}^H = \sigma_{M_g}^{extr} = 251 \text{ MPa}$$

$$\tau_{M_s}^{extr} = \frac{333 \text{ Nm}}{5,3 \text{ cm}^3} = 63 \text{ MPa}$$

$$\tau_T^{sr} = \frac{1000 \text{ N}}{707 \text{ mm}^2} = 1,5 \text{ MPa}$$

Statyka naroży (przekrój w połowie długości BD)

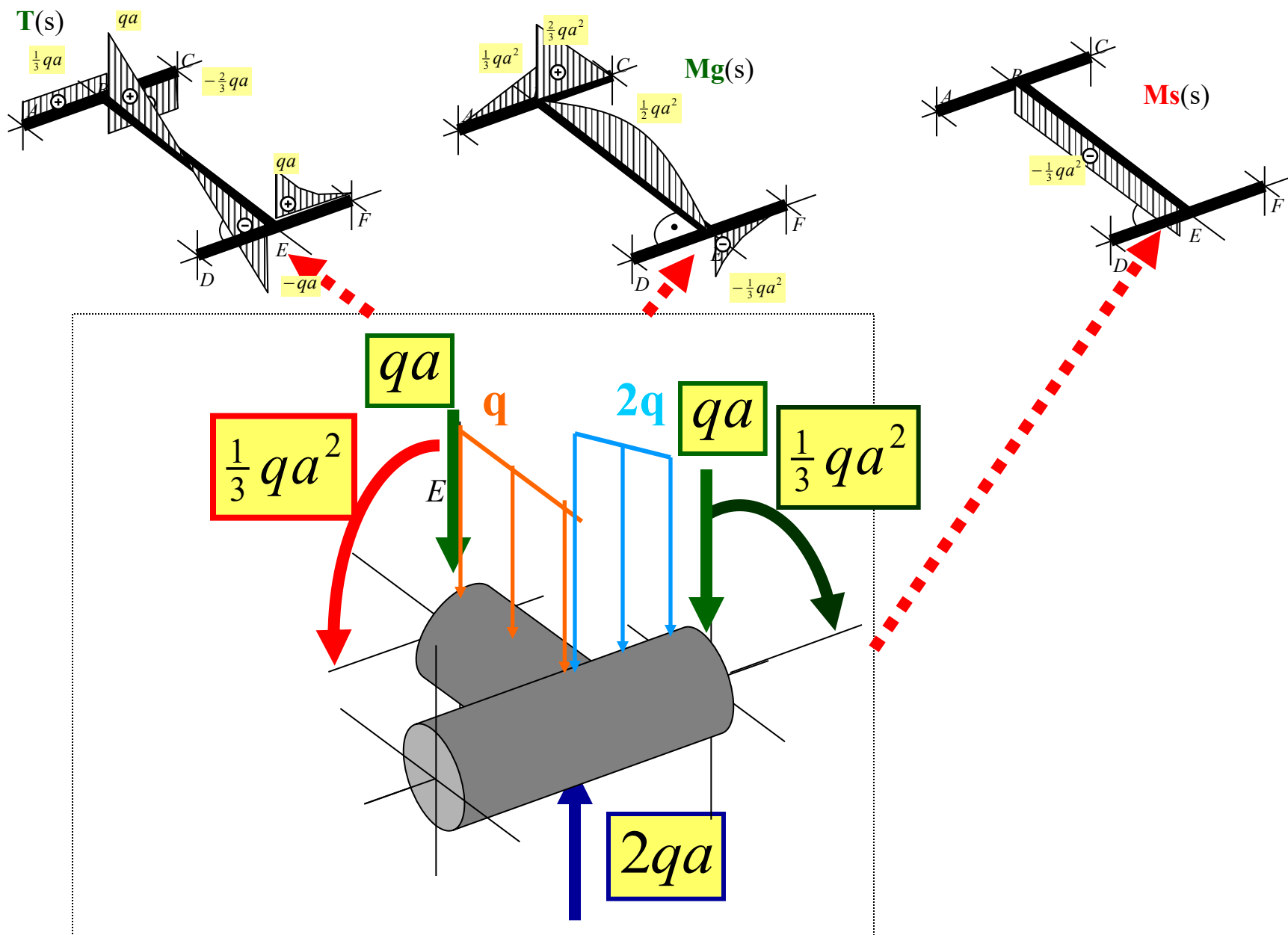


$$\sigma_{Mg}^{extr} = \frac{500 \text{ Nm}}{2,65 \text{ cm}^3} = 189 \text{ MPa}$$

$$\tau_{Ms}^{extr} = \frac{333 \text{ Nm}}{5,3 \text{ cm}^3} = 63 \text{ MPa}$$

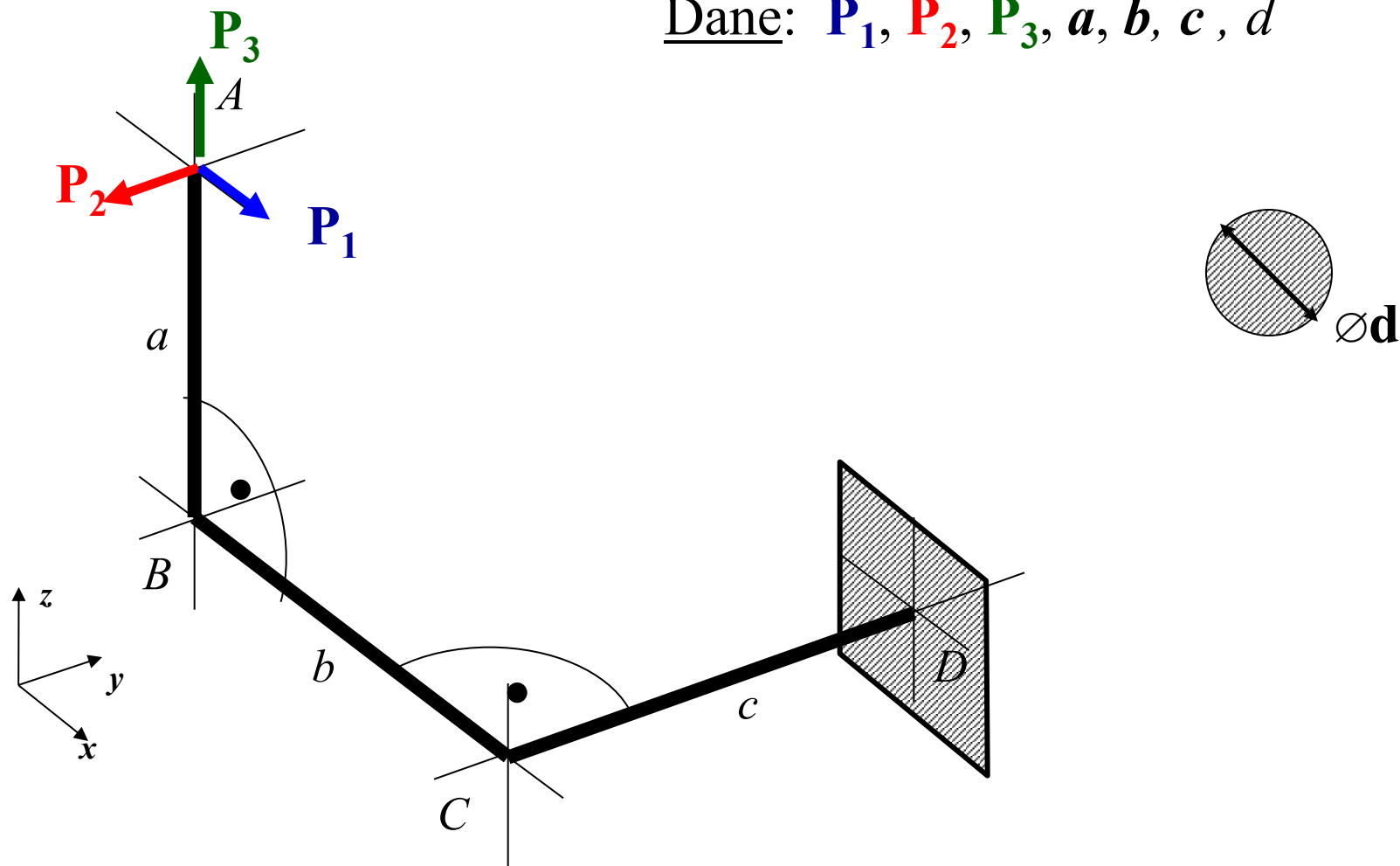
$$\sigma_{red}^H = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 218 \text{ MPa}$$

Statyka naroży (naroże E)

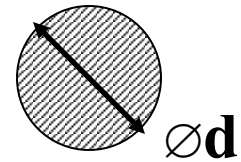


Zad.2. Rozwiązać ramę przestrzenną

Dane: $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, a , b , c , d



Trzy przedziały zmienności funkcji sił wewnętrznych



Charakterystyki przekroju:

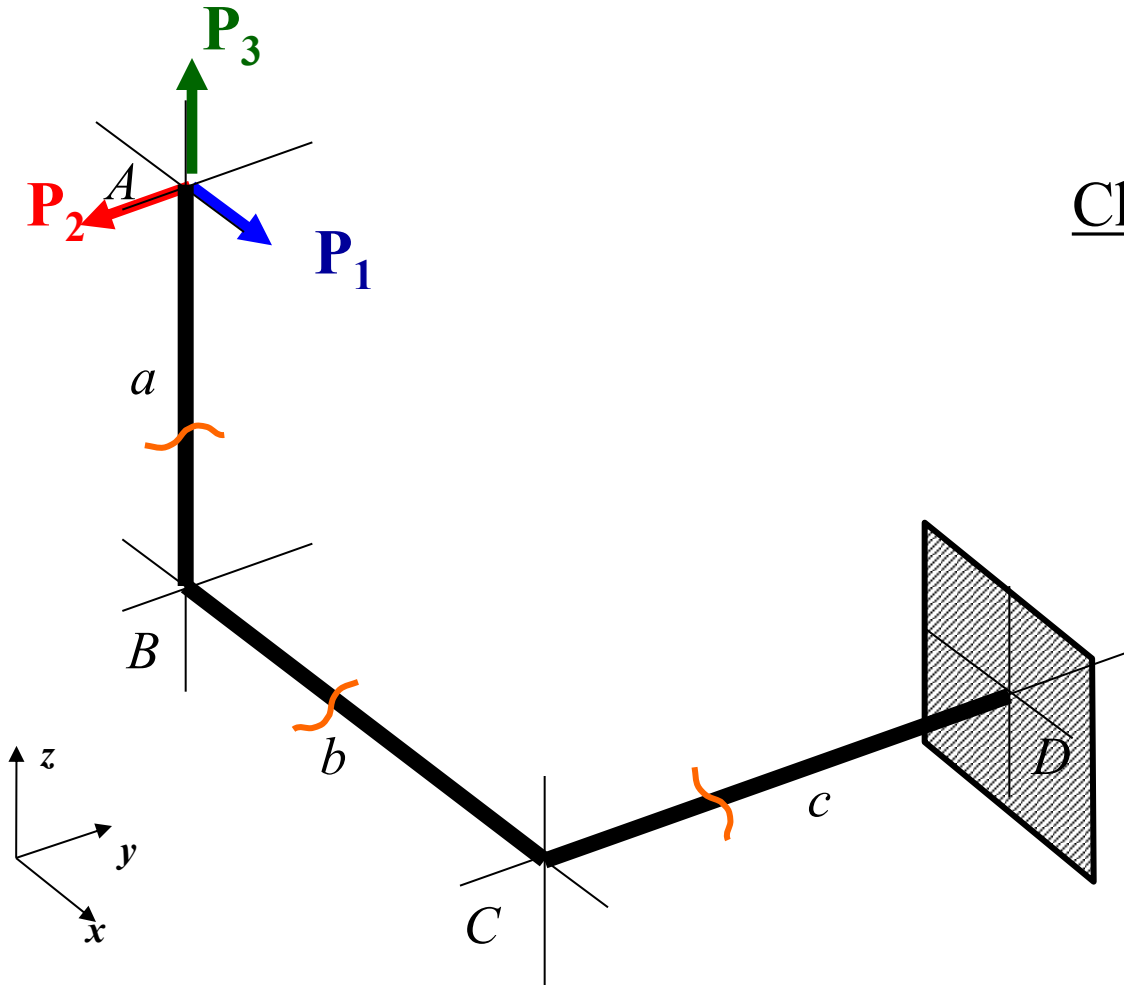
$$J_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$\rightarrow w_y = \frac{J_y}{d/2}$$

$$J_o = \frac{\pi d^4}{32}$$

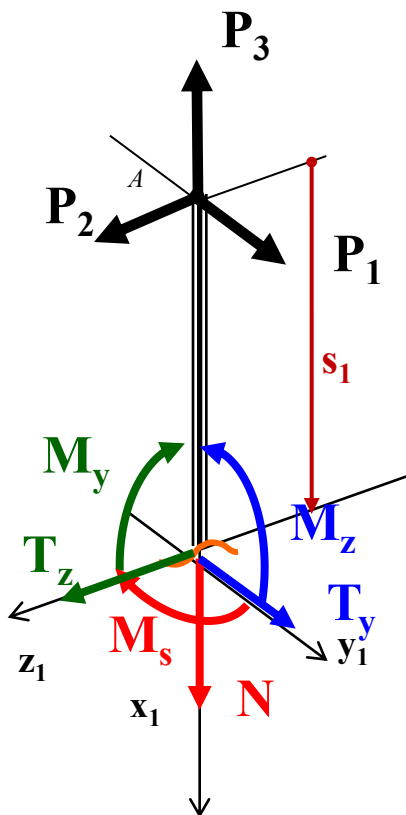
$$\rightarrow w_o = \frac{J_o}{d/2}$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$



Wyznaczenie składowych wysiłku przekroju $N, T_y, T_z, M_s, M_y, M_z$,

Przedział I (A÷B)



$$\sum F_{x_1} = 0 \rightarrow N - P_3 = 0$$

$$\rightarrow N(s) = P_3$$

$$\sum F_{y_1} = 0 \rightarrow T_y + P_1 = 0$$

$$\rightarrow T_y(s) = -P_1$$

$$\sum F_{z_1} = 0 \rightarrow T_z + P_2 = 0$$

$$\rightarrow T_z(s) = -P_2$$

$$\sum M_{pp_{z_1}} = 0 \rightarrow M_z - P_1 \cdot s_1 = 0$$

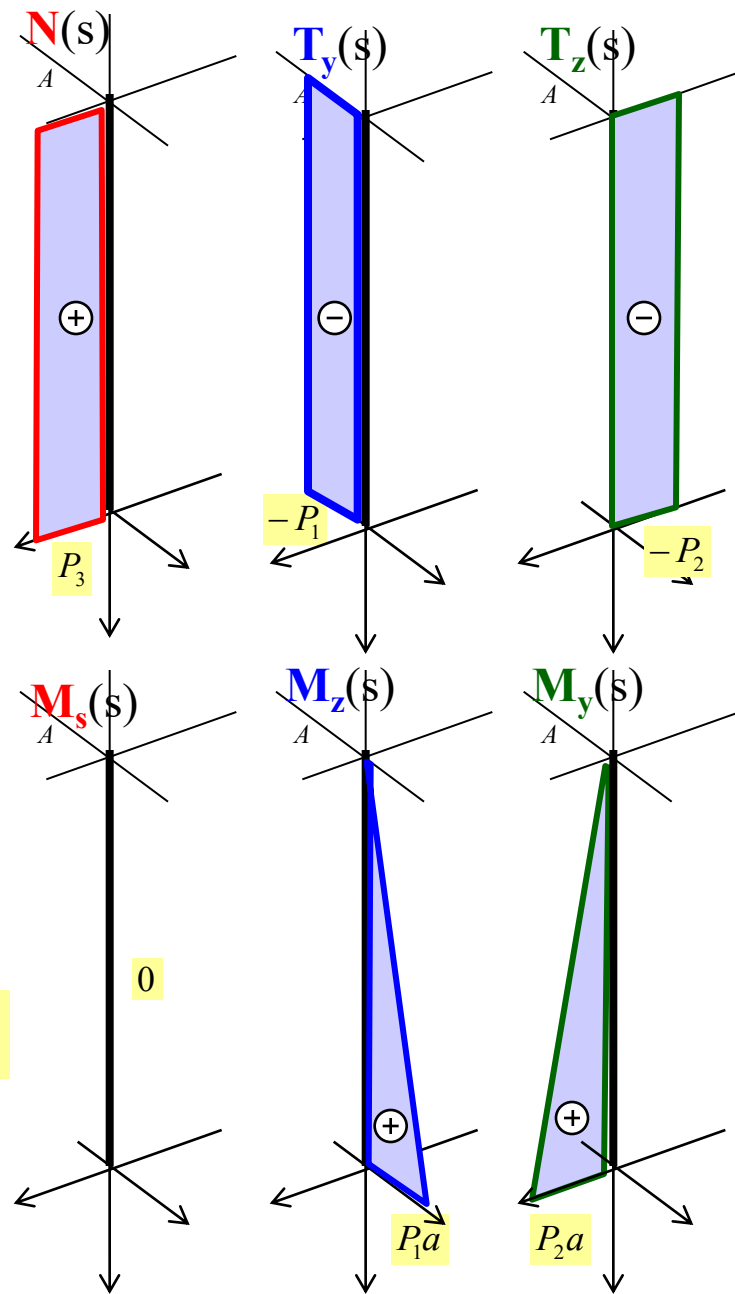
$$\rightarrow M_z(s) = P_1 \cdot s_1$$

$$\sum M_{pp_{y_1}} = 0 \rightarrow M_y - P_2 \cdot s_1 = 0$$

$$\rightarrow M_y(s) = P_2 \cdot s_1$$

$$\sum M_{x_1} = 0 \rightarrow M_s = 0$$

$$\rightarrow M_s(s) = 0$$



Wyznaczenie składowych wysiłku przekroju $\mathbf{N}$, $\mathbf{T}_y$, $\mathbf{T}_z$, $\mathbf{M}_s$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$,

Przedział II (B÷C)

$$\sum F_{x_2} = 0 \rightarrow N + P_1 = 0 \rightarrow N(s) = -P_1$$

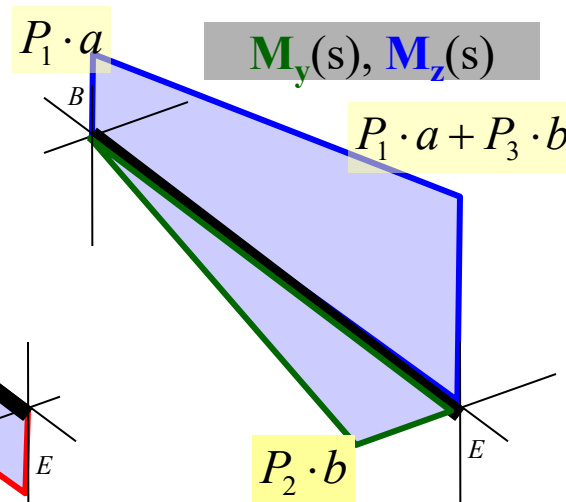
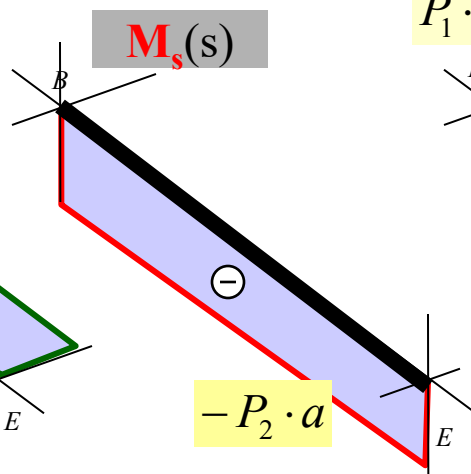
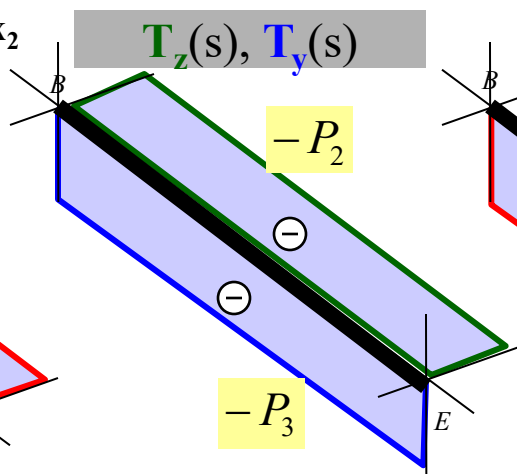
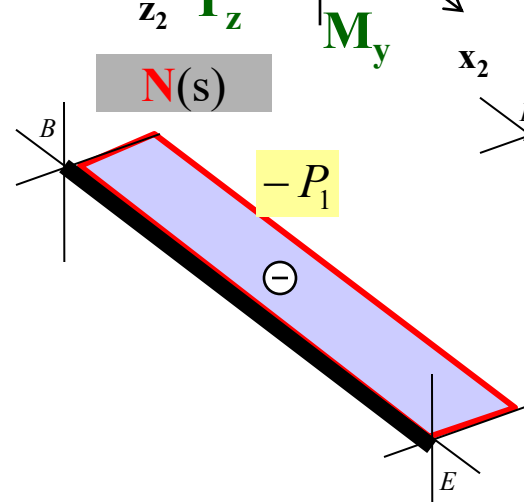
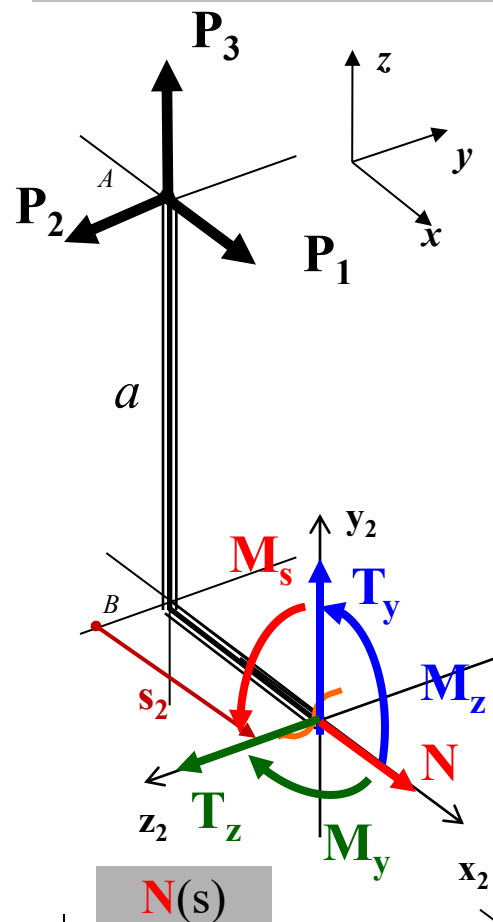
$$\sum F_{y_2} = 0 \rightarrow T_y + P_3 = 0 \rightarrow T_y(s) = -P_3$$

$$\sum F_{z_2} = 0 \rightarrow T_z + P_2 = 0 \rightarrow T_z(s) = -P_2$$

$$\sum M_{pp_{z_2}} = 0 \rightarrow M_z - P_1 \cdot a - P_3 \cdot s_2 = 0 \rightarrow M_z(s) = P_1 \cdot a + P_3 \cdot s_2$$

$$\sum M_{pp_{y_2}} = 0 \rightarrow M_y - P_2 \cdot s_2 = 0 \rightarrow M_y(s) = P_2 \cdot s_2$$

$$\sum M_{x_2} = 0 \rightarrow M_s + P_2 \cdot a = 0 \rightarrow M_s(s) = -P_2 \cdot a$$



Wyznaczenie składowych wysiłku przekroju $N, T_y, T_z, M_s, M_y, M_z$,

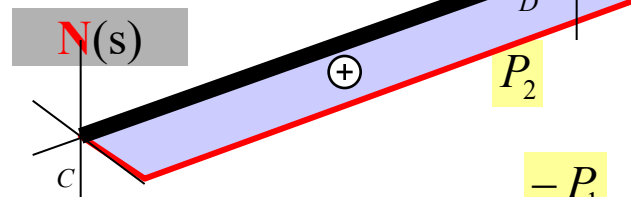
Przedział III (C÷D)

$$\sum F_{x_3} = 0 \rightarrow N(s) = P_2$$

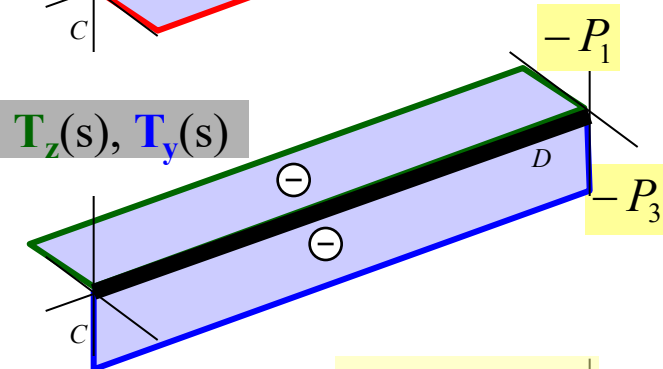
$$\sum F_{y_3} = 0 \rightarrow T_y(s) = -P_3$$

$$\sum F_{z_3} = 0 \rightarrow T_z(s) = -P_1$$

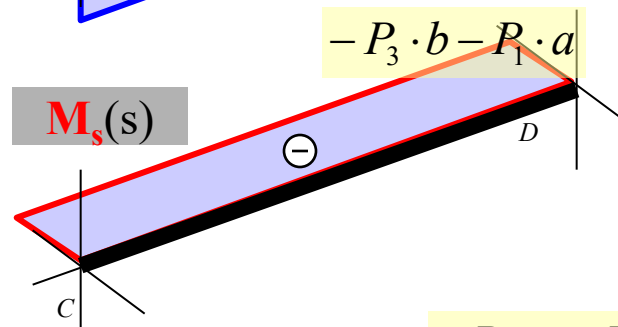
$$N(s)$$



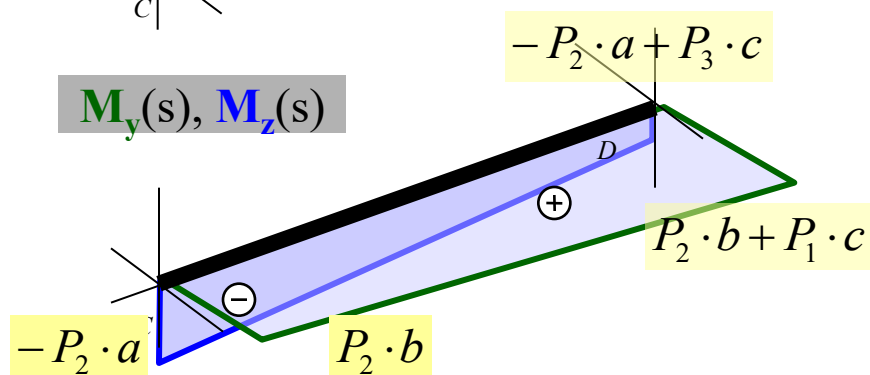
$$T_z(s), T_y(s)$$



$$M_s(s)$$



$$M_y(s), M_z(s)$$

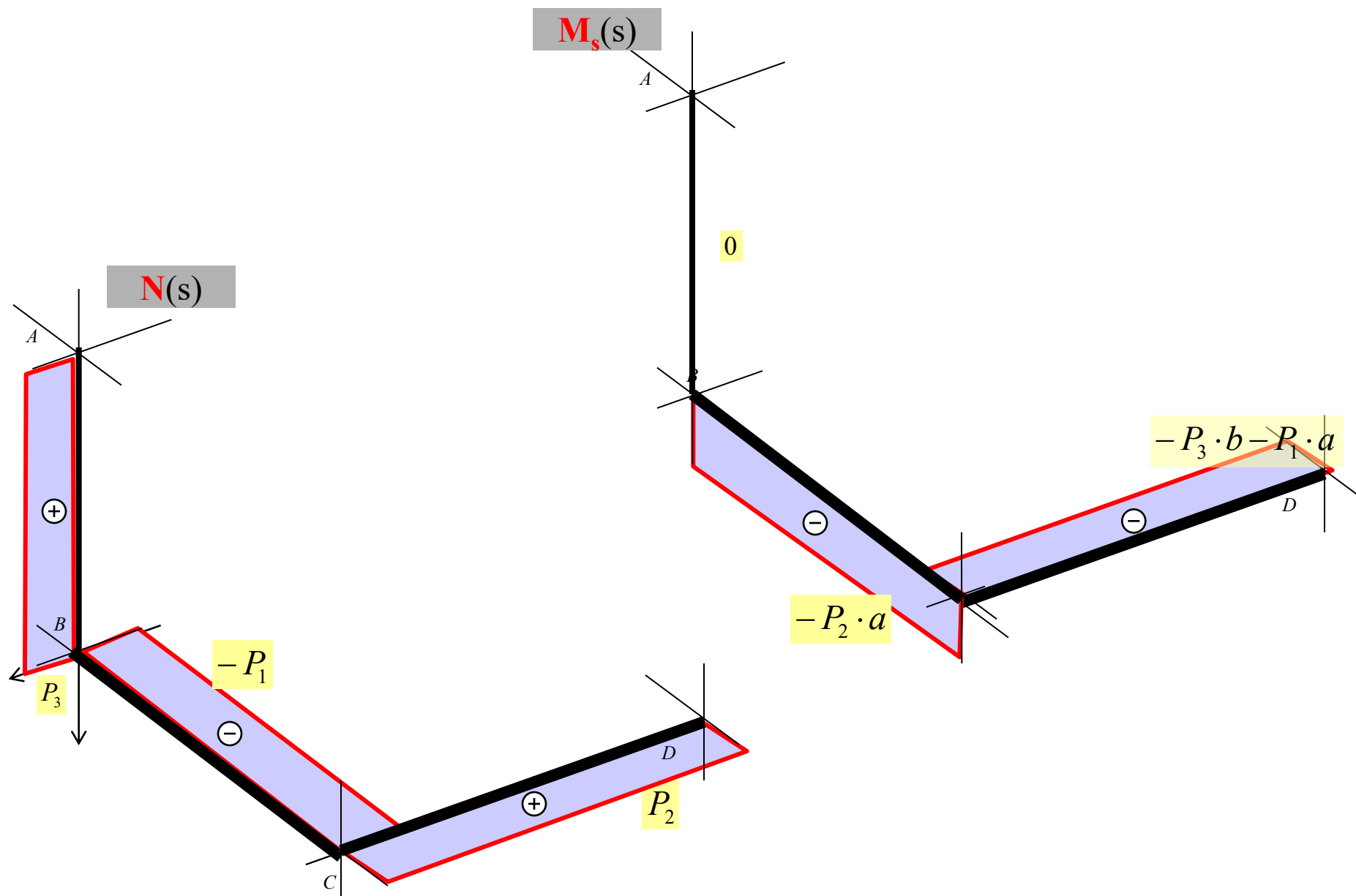


$$\sum M_{pp_{z_3}} = 0 \rightarrow M_z(s) = -P_2 \cdot a + P_3 \cdot s_3$$

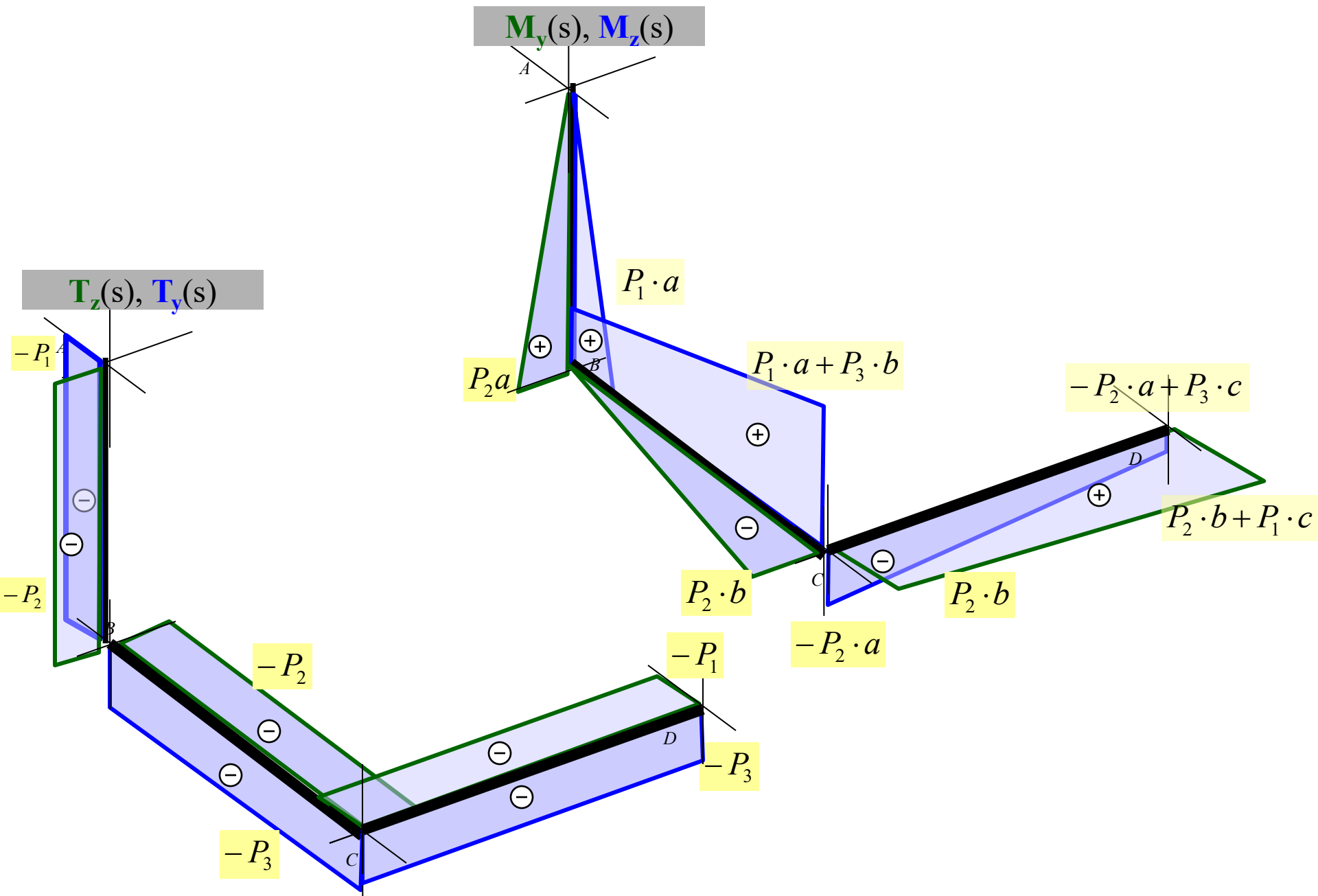
$$\sum M_{pp_{y_2}} = 0 \rightarrow M_y(s) = P_2 \cdot b + P_1 \cdot s_3$$

$$\sum M_{x_3} = 0 \rightarrow M_s(s) = -P_3 \cdot b - P_1 \cdot a$$

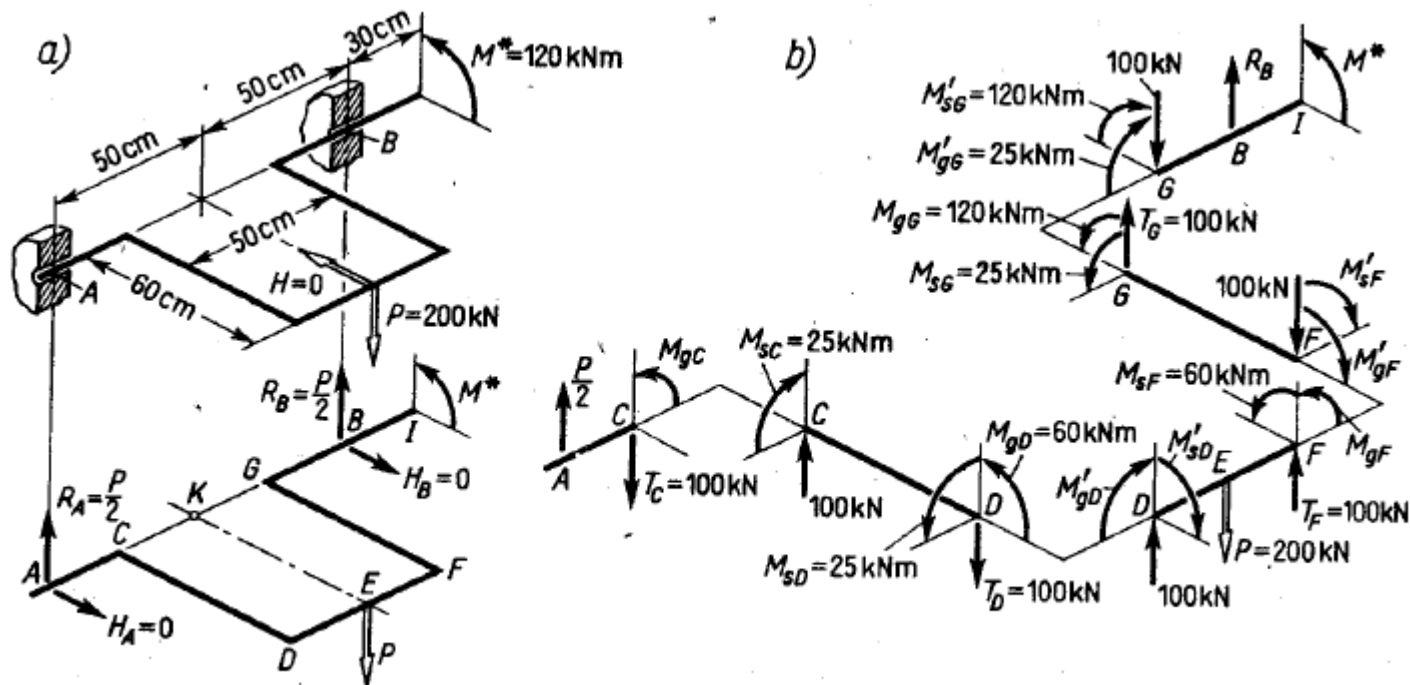
Składowe wysiłku przekroju N , T_y , T_z , M_s , M_y , M_z ,



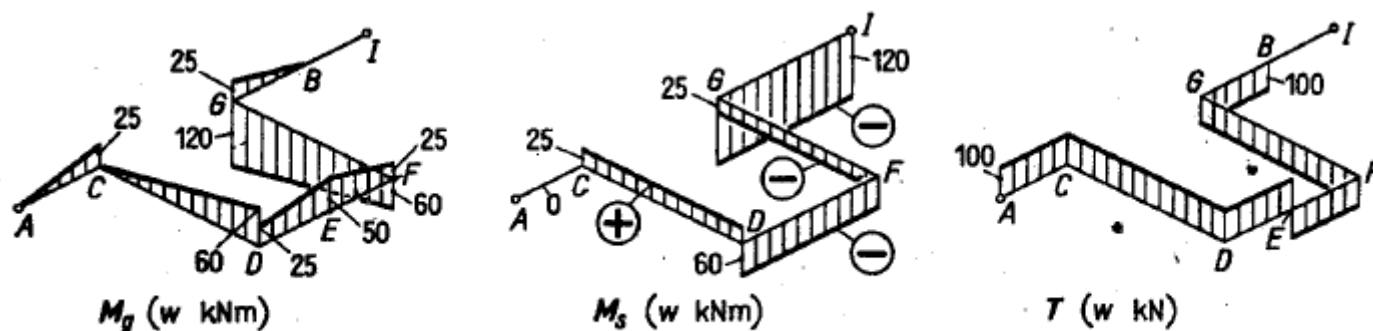
Składowe wysiłku przekroju N , T_y , T_z , M_s , M_y , M_z ,



Przykład ramy płaskiej obciążonej przestrzennie

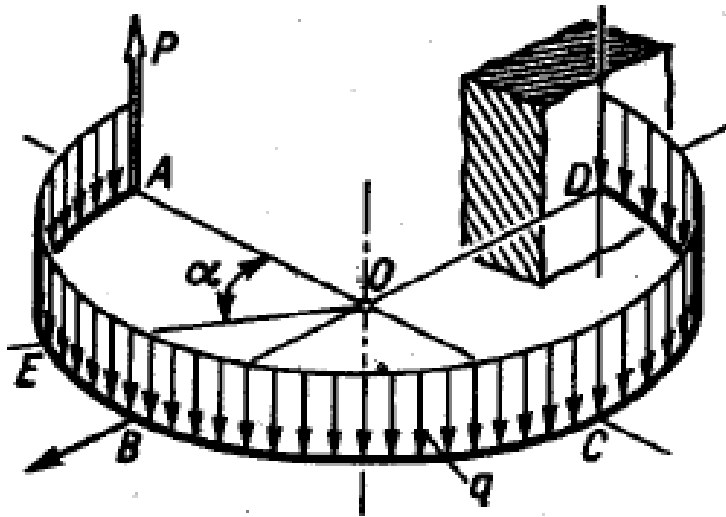


Rys. 9.14. Analiza ramy płaskiej przestrzennie obciążonej

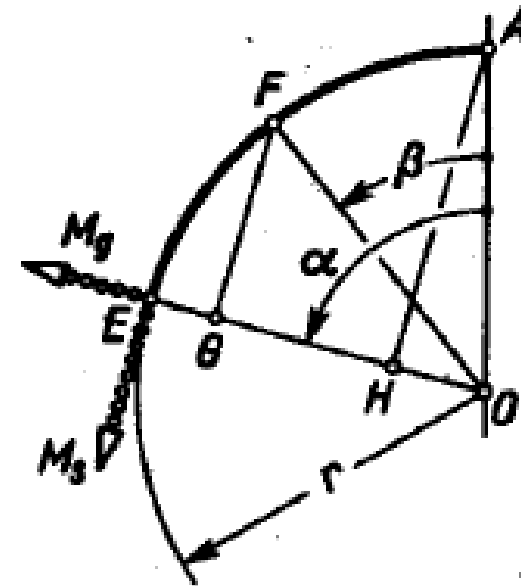
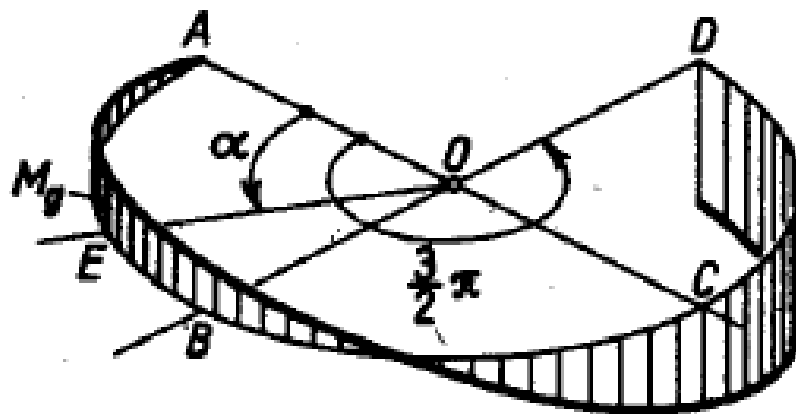


Rys. 9.15. Wyniki analizy ramy z rys. 9.14

Przykład ramy płaskiej zakrzywionej obciążonej przestrzennie



wykres M_θ dla $P=2qr$



$$T = P - q r \alpha$$

$$M_\theta - P r \sin \alpha + \int_0^\alpha q r d\beta \cdot r \sin(\alpha - \beta) = 0,$$

$$M_s + P \cdot \overline{EH} - \int_0^\alpha (q r d\beta) \cdot \overline{EG} = 0,$$